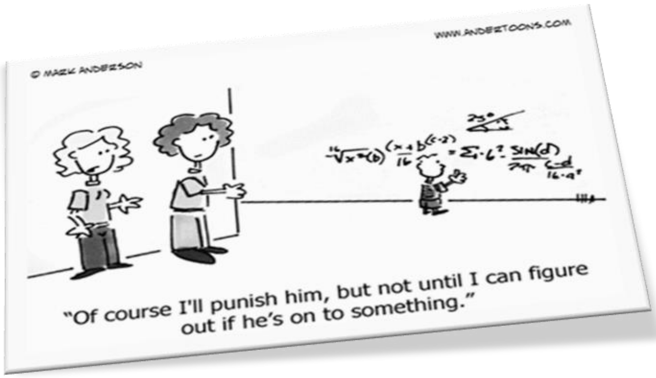


Mark Broere

Unterjährige Cashflow-Profile und Näherungslösungen bei der Bewertung von Unternehmen und Projekten

10. Jahrestagung des Arbeitskreises Finanzierung der Professorinnen und Professoren an Hochschulen für Angewandte Wissenschaften
am 01. – 02. 07.2022

Vorstellung

Prof. Dr. Mark Broere

Professur für ABWL, insb. Investition und Finanzierung
Studiengangsverantwortung Betriebswirtschaftslehre (B.A.) bbgl.

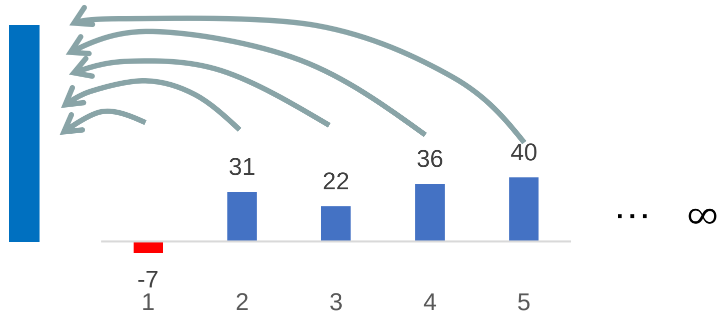
0511 95784 40

broere@leibniz-fh.de

*

Unternehmenswert

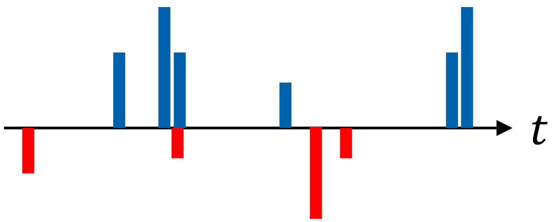
- Der Unternehmenswert V wird oft als Summe der Barwerte der erwarteten zukünftigen Einzahlungsüberschüsse (Cashflows C_t) zum Diskontierungssatz r für eine Periode t berechnet



$$V = \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

Unterjährige Cashflows

- Dies ist eine Vereinfachung, tatsächlich setzt sich der Cashflow aus unterjährigen Ein- und Auszahlungen zusammen, die zu verschiedenen (zufälligen) Zeitpunkten im Kontinuum der Zeit anfallen



- Zur exakten Berechnung des Barwertes müsste jede einzelne Ein- und Auszahlung über die jeweilige exakte Dauer bis zu ihrem Auftreten diskontiert werden:

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k}{(1+r)^{t_k}}$$

[ANDOR/DÜLK 2012]

k Anzahl der Zahlungen Z
t_k Zeitpunkt der Zahlung Z_k (ausgedrückt in derselben Einheit wie die Zinsperiode)
r Zinssatz für eine Periode
Z_k k-te Zahlung

Problematik

- Wir teilen „die Zukunft“ in gleiche Perioden t ein und verwenden aggregierte, endfällige Cashflows (End-of-Year-Convention, EY)
- Damit entsteht eine Ungenauigkeit bei der Bewertung, welche als relativer Fehler e wie folgt abgebildet werden [LOHMANN/OAKFORD 1984]:

$$e = \frac{\hat{V} - V}{V} = \frac{\hat{V}}{V} - 1$$

$\hat{V}$ geschätzter Barwert
V tatsächlicher Barwert

- Nachfolgend wird das Problem auf die Diskontierung einer einzelnen Periode (ein Jahr) reduziert (Annahme einer unveränderten Diskontierungsrate und gleichbleibender unterjähriger Zahlungsprofile)

Höhe des Fehlers

- Bei **ausschließlich positiven unterjährigen Cashflows** ist der relative Fehler bei Anwendung der End-of-Year-Methode maximal, wenn alle unterjährigen Cashflows tatsächlich in einem Betrag zu Beginn der Periode eintreten. Dann ergibt sich:

$$e_{\max} = \frac{\hat{V}}{V} - 1 = \frac{C/(1+r)}{C} - 1 = -\frac{r}{1+r}$$

- $e_{\max}$ ist Abhängig von r. Beispielsweise ergibt sich bei $r = 10$ Prozent ein maximaler Rechenfehler in Höhe von ca. -9,1 Prozent

- Bei Betrachtung von Cashflows mit unterschiedlichem Vorzeichen (Ein- und Auszahlungen) kann der **maximale relative Fehler** allerdings **unendlich groß** sein (wenn V nahe Null) [DÜLK 2016]

Lösungsansätze (1)

- **„Brute-Force"-Remedy** [McMath 1990]: Kürzere Periodenunterteilung: z.B. kann das Jahr in 12 Monate oder 52 Wochen unterteilt werden
  - Rechenfehler wird beliebig klein
  - Hoher Aufwand (Prognoseerstellung, Modellierung, Umrechnung Diskontierungssatz)
  - Prognose in dieser Genauigkeit überhaupt möglich?

Lösungsansätze (2)

- Exakte Berechnung auf Basis von bekannten unterjährigen Verteilungsfunktionen [u.a. REMER 1984, TANCHOKO et al. 1981], z.B. gleichverteilt, linear, exponentiell, Sinus, stochastisch...

- Je nach Annahme über Cashflow und Diskontierung (stetig oder diskret) werden vier Fälle unterschieden, für die unterschiedliche mathematische Lösungsverfahren eingesetzt werden

	Diskrete Verzinsung	Stetige Verzinsung
Diskreter Cashflow	$C_0 + \sum_{n=1}^{N} C_n (1+r)^{-n}$	$C_0 + \sum_{n=1}^{N} C_n e^{-jn}$
Stetiger Cashflow	$\sum_{n=1}^{N} \left[\int_{n-1}^{n} C(t)dt \right] (1+r)^{-n}$	$\int_0^N C(t) e^{-jt} dt$

[Nach REMER 1984]

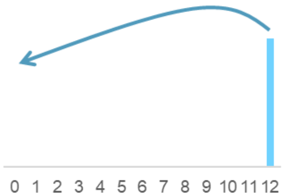
Exaktes Verfahren

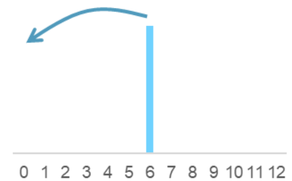
z.T. aufwändig, zufällige Cashflow-Verteilungen nicht berücksichtigt

Praxistauglich?

Lösungsansätze (3)

- **Mid-Year-Convention** [u.a. ARZAC 2005]:





$$V_{EY} = \frac{C}{1+r}$$

Korrekturfaktor

$$V_{MY} = \frac{C}{\sqrt{1+r}} = P_{EY}\sqrt{1+r}$$

- Bei **ausschließlich positivem Cashflow** ist der entsprechende maximale Fehler $e_{\max} = \frac{1-\sqrt{1+r}}{\sqrt{1+r}}$; bei $r = 10$ Prozent ergeben sich ca. -4,7 Prozent

  - Fehler wird kleiner (ca. um die Hälfte)
  - Geringer Aufwand der Berechnung (Diskontierung oder Korrekturfaktor)

Neuerer Lösungsansatz [ANDOR/DÜLK 2012/16]

- Entwickeln formal-analytisch Korrekturfaktor mit minimalen Betrag von $e_{\max}$ auf Grundlage oberer und unterer Schranken des relativen Fehlers
- Ergebnis entspricht dem harmonischen Mittel von End-of-Year (EY) und Beginning-of-Year (BY) Werten

$$V = \frac{2}{\frac{1}{V_{EY}} + \frac{1}{V_{BY}}} = V_{EY} \frac{1+r}{1+\frac{r}{2}}$$

[ANDOR/DÜLK 2012]

- Entwickeln allgemeinere Lösung, wenn positive und negative Cashflows berücksichtigt werden [Dülk (2016)]

Rearranging (13), it can be shown that $\hat{P}_{\text{opt}}$ is actually the harmonic mean of the bounds

$$\hat{P}_{\text{opt}} = \frac{2}{\frac{1}{P_E^+ + P_E^-(1+i)} + \frac{1}{P_E^+(1+i) + P_E^-}}. \qquad (14)$$

Fragestellungen

(1) Ist die neuere Methode nach Andor/Dülk immer „besser“ als andere Methoden?

- insb. MY-Convention
- Untersuchung für verschiedene Verteilungsannahmen

(2) Welche Rechenmethode „am Besten“ in der Praxis anwenden?

- Pauschalempfehlung für Korrekturverfahren?
- Ggf. situative Entscheidung erforderlich (historische Zahlungsprofile bekannt? Genauigkeit der Daten? Prognosemuster mathematisch oder zufällig?)

Fragestellung (1) – Zahlungsprofil: Stetige Gleichverteilung

- Konstante Wahrscheinlichkeitsdichte $c(t)$ mit $\int_0^1 c(t)dt = C$
- Exakter Barwert (bei diskretem Zinssatz r):

$$\mathrm{V} = \int_0^1 \frac{C}{(1+r)^t} dt = C \frac{r}{(1+r)\ln(1+r)} = V_{EY} \frac{r}{\ln(1+r)}$$

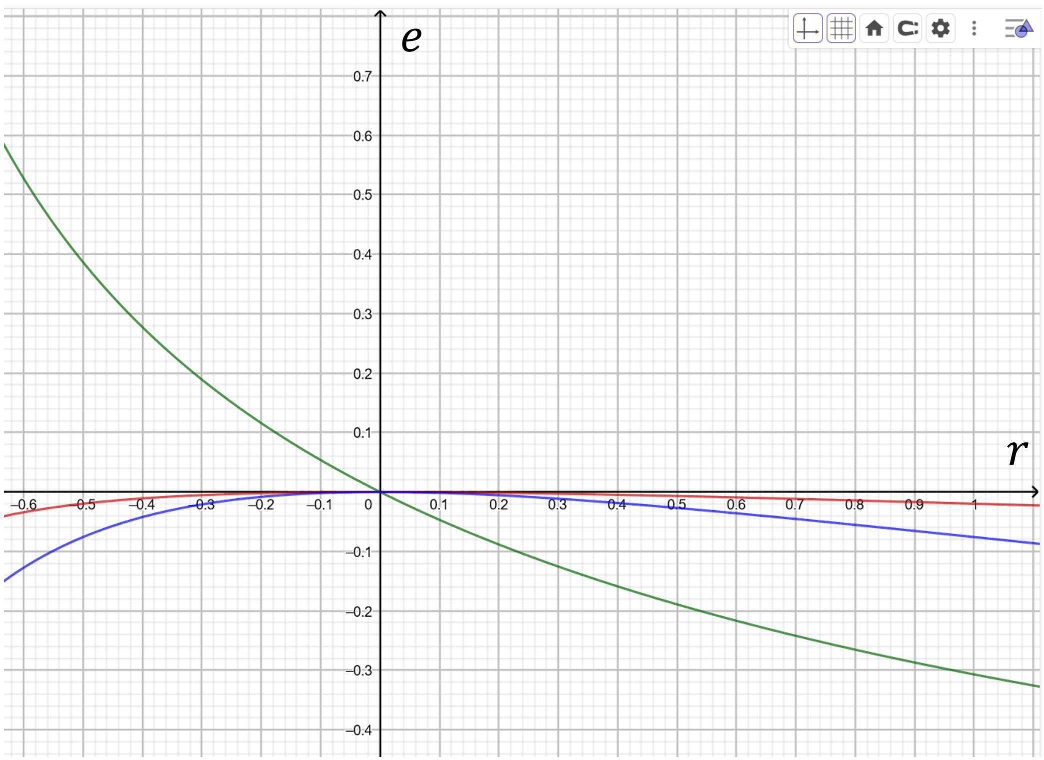
- Es ergibt sich:

Schätzverfahren	Relativer Fehler
End-of-Year	$\frac{\ln(1+r)}{r} - 1$
Mid-Year	$\frac{\sqrt{1+r}\ln(1+r)}{r} - 1$
Harmonic Mean	$\frac{(1+r)\ln(1+r)}{r\left(1+\frac{r}{2}\right)} - 1$

0<r<1:
$\Rightarrow$ MY besser als H, besser als EY

Fragestellung (1) – Zahlungsprofil: Stetige Gleichverteilung

- Bei stetiger Gleichverteilung ist für $0 < r < 1$ der relative Fehler e bei der Mid-Year-Convention am geringsten



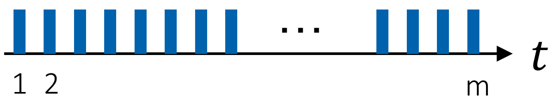
$$e_{MY} = \frac{\sqrt{1+r}\,\ln(1+r)}{r} - 1$$

$$e_H = \frac{(1+r)\ln(1+r)}{r\left(1+\frac{r}{2}\right)} - 1$$

$$e_{EY} = \frac{\ln(1+r)}{r} - 1$$

Fragestellung (1) – Zahlungsprofil: Diskrete Gleichverteilung

- Das Jahr wird in m gleiche Perioden mit konst. Cashflow C/m unterteilt



- Exakter Barwert (bei diskretem Zinssatz r):

$$\mathrm{V} = \frac{C}{m} \frac{\mathrm{r}}{(1+\mathrm{r})\left[(1+\mathrm{r})^{\frac{1}{m}} - 1\right]} = \mathrm{V}_{EY} \frac{\mathrm{r/m}}{(1+\mathrm{r})^{\frac{1}{m}} - 1}$$

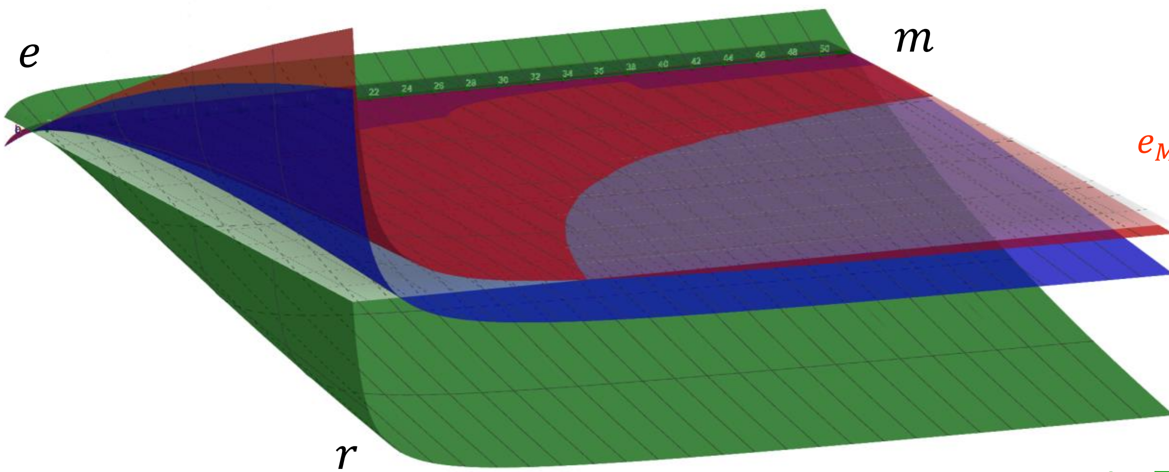
- Es ergibt sich:

Schätzverfahren	Relativer Fehler
End-of-Year	$\frac{\mathrm{m}[(1+\mathrm{r})^{1/\mathrm{m}}-1]}{r} - 1$
Mid-Year	$\frac{\mathrm{m}(1+\mathrm{r})^{1/2}[(1+\mathrm{r})^{1/\mathrm{m}}-1]}{r} - 1$
Harmonic Mean	$\frac{\mathrm{m}(1+\mathrm{r})[(1+\mathrm{r})^{1/\mathrm{m}}-1]}{r(1+\frac{\mathrm{r}}{2})} - 1$

0<r<1:
$\Rightarrow$ Ergebnis abhängig von m

Fragestellung (1) – Zahlungsprofil: Diskrete Gleichverteilung

- Ergebnis ist abhängig von m und unterschiedet sich nach Vorzeichen



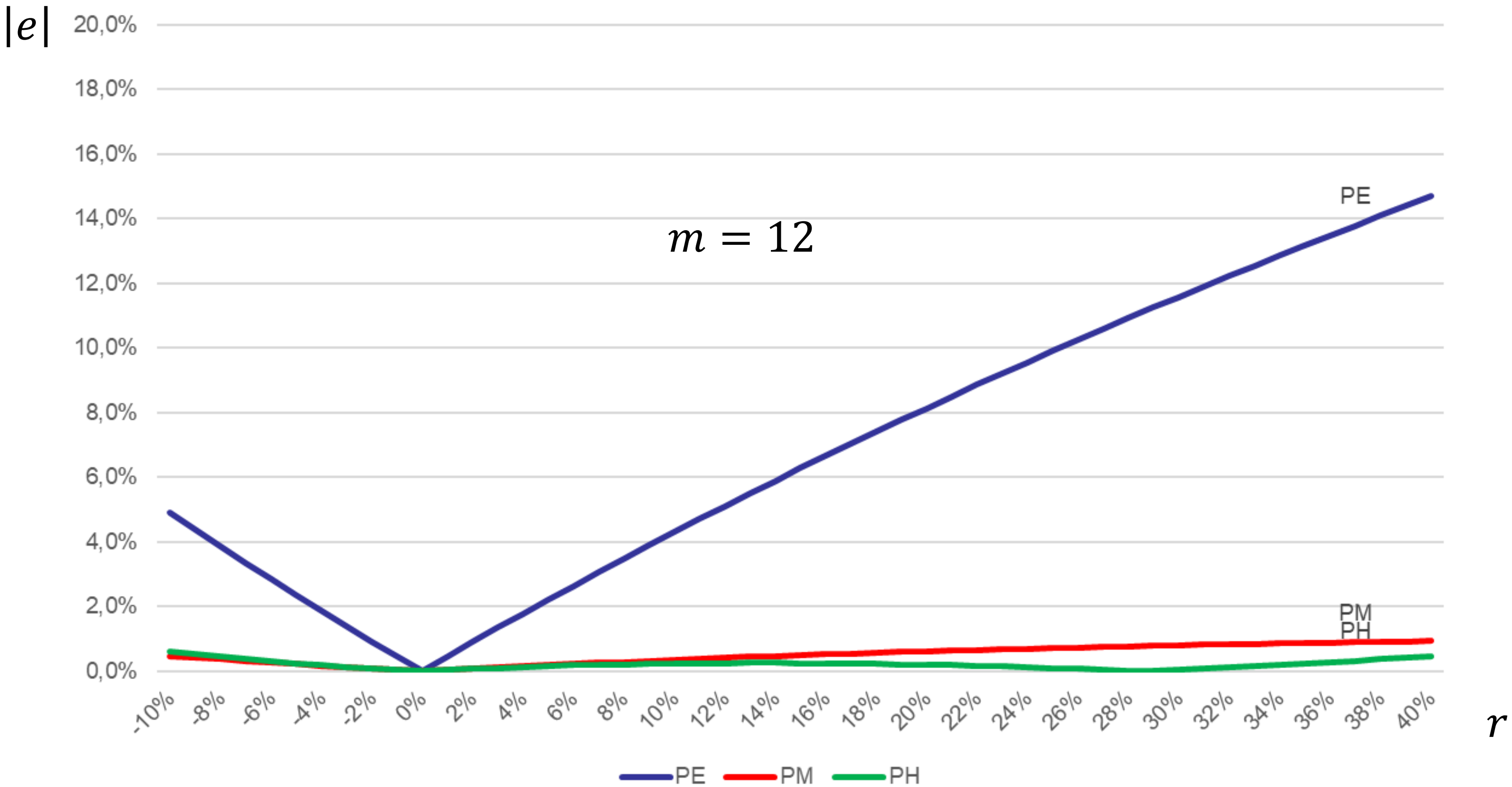
$$e_{MY}=\frac{m(1+r)^{1/2}[(1+r)^{1/m}-1]}{r}-1$$

$$e_{H}=\frac{m(1+r)[(1+r)^{1/m}-1]}{r(1+\frac{r}{2})}-1$$

$$e_{EY}=\frac{m[(1+r)^{1/m}-1]}{r}-1$$

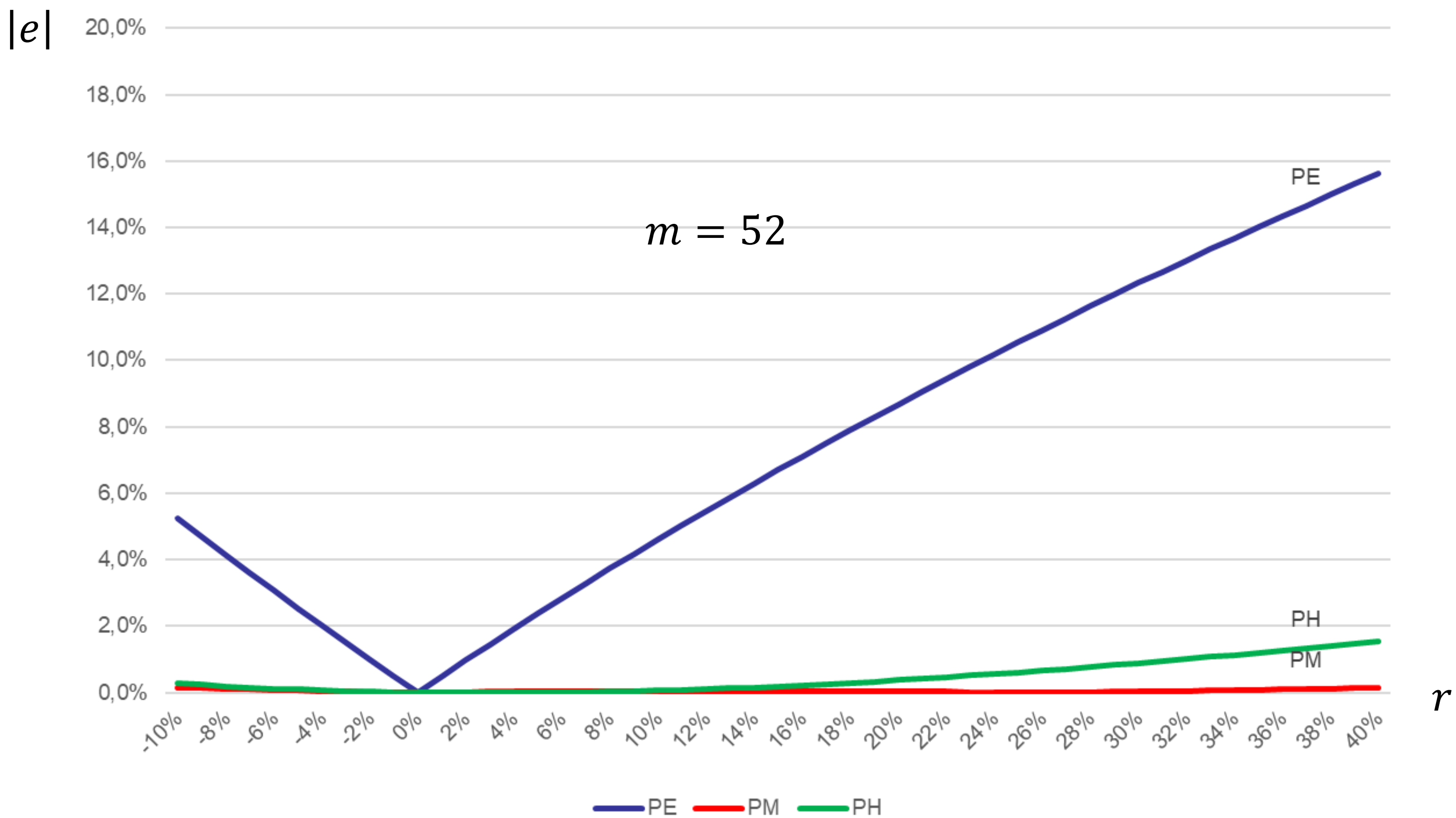
Fragestellung (1) – Zahlungsprofil: Diskrete Gleichverteilung

- Bei monatlicher Unterteilung ist das Harmonic Mean am Genauesten



Fragestellung (1) – Zahlungsprofil: Diskrete Gleichverteilung

- Bei wöchentlicher Unterteilung ist Mid-Year am Genauesten



"We should probably take an aggressive approach. My allowance is 50¢ a week and I want to retire at age 16."

Fragen?

Literatur

Andor, György; Dülk, Marcell (2013): Harmonic mean as an approximation for discounting intraperiod cash flows. In: The Engineering Economist 58 (1), S. 3–18.

Dülk, Marcell (2016): The sign of cash flows. A source of error in present value approximations. In: The Engineering Economist 61 (2), S. 79-94.

Lawrence, Edward (2009): Biases in Mid-Year and End-of-Year Conventions in Discounted Cash Flow Models for Corporate Valuation. In: Journal of Legal Economics 16 (1), S. 1–15.

Lohmann, Jack R.; Oakford, R. V. (1984): ERRORS IN PRESENT WORTH EVALUATIONS ATTRIBUTABLE TO THE END-OF-YEAR AND MID-YEAR CASH FLOW CONVENTIONS. In: The Engineering Economist 29 (4), S. 303–309

McMath, H. Kent (1990): Correction Constants for Present Values of Sub-Annual Cash Flows. In: Decision Sciences 21 (4), S. 842–852.

Remer, Donald S.; Tu, Jerome C.; Carson, Dean E.; Ganiy, Saleem A. (1984): The state of the art of present worth analysis of cash flow distributions. In: Engineering Costs and Production Economics 7 (4), S. 257–278.

Tanchoco, Jose M.A.; Buck, James R.; Leung, Lawrence C. (1981): Modeling and discounting of continuous cash flows under risk. In: Engineering Costs and Production Economics 5 (3-4), S. 205–216.

The Leibniz FH invites paper submission and contributions to its Workshop on corporate rules & decision-making.

#Decisions 2022: Startups and Investment Decisions

October 6, 2022

Scientific Forum: 10 a.m. – 5 p.m.

Business Evening: 5 p.m. – 8 p.m.

Entrepreneurs have to make risky decisions and often require external funding for their projects. All this becomes even more pronounced for startups and their business models. This Leibniz Workshop seeks to bring together experienced researchers of that field to present and discuss their latest work throughout the day. Entrepreneurs and business people are invited to join the Business Evening for joint talks and a more “hands-on” perspective on the topic

As a special guest, we welcome **Christian Beuther** (co-pace GmbH) who is the head operations at the startup co-operation program of Continental AG and will provide hands-on expertise in his **keynote** on industrial startup cooperation, proof-of-concept and partnership management.

We welcome contributions that are related to startups, entrepreneurship, funding and investment decisions. Submission of extended abstracts or presentations is acceptable, but priority will be given to completed manuscripts. We encourage submissions by young researchers at the PhD-level.

Paper submissions to forschung@leibniz-fh.de

Submission deadline: **July 15**

Acceptance letter: **August 15**

The conference will be held as an offline event unless the public health situation requires us to hold it online. The workshop language is English. After the workshop, all presenters of accepted contributions are cordially invited for a joint dinner at the *Best Western Parkhotel Kronsberg* at 8:30 p.m.

Attendance fee (Scientific Forum only)

- Presenters of accepted contributions, speakers and PhD students free of charge

- 50 Euro for non-presenting scientists, 100 Euro for others

For any questions, please contact the local organizer (Robin Christmann, christmann@leibniz-fh.de).

We are looking forward to seeing you at the Expo Plaza!